Chapitre 12

Droites remarquables d'un triangle

Dans ce chapitre, ABC désigne un triangle non aplati et l'on pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On note aussi A', B', C' les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Les mesures dans $[0, \pi]$ des angles géométriques du triangle ABC sont notées $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Il est bon de remarquer que l'on peut toujours orienter le plan de façon à ce que le triangle ABC soit direct et qu'alors $\widehat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\widehat{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $\widehat{C} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, où l'écriture $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ désigne une mesure modulo 2π de l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

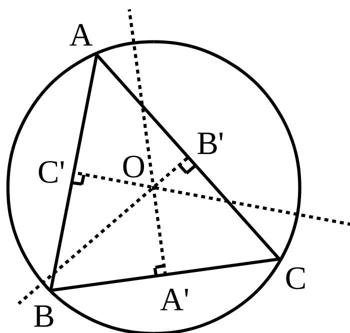
12.1 Médiatrices

On appelle **médiatrice du triangle** toute médiatrice de l'un de ses côtés. Un triangle possède ainsi trois médiatrices, et quand on les trace, elles semblent passer par un même point. C'est effectivement ce que l'on peut démontrer :

Théorème 12.1 *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

Preuve — Soient Δ_A, Δ_B, Δ_C les médiatrices des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ d'un triangle non aplati ABC. Les droites Δ_A et Δ_B ne sont pas parallèles, car si elles l'étaient, les droites (BC) et (CA) seraient perpendiculaires à une même direction (la direction commune de Δ_A et Δ_B), donc seraient parallèles, et comme elles passent par le même point C, elles seraient confondues. C'est impossible puisque les points A, B et C ne sont pas alignés.

On peut donc affirmer que Δ_A et Δ_B se coupent en un point O. La médiatrice d'un segment étant l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment, on aura $OB = OC$ et $OC = OA$. Par transitivité de la relation d'égalité on obtient $OB = OA$, ce qui prouve que O appartient à Δ_C. ■



Théorème 12.2 *Il existe un et un seul cercle qui passe par les sommets d'un triangle. Son centre est le point de concours des médiatrices du triangle.*

Preuve — Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse — Si un cercle $\mathcal{C}$ passe par les sommets A, B, C du triangle ABC, son centre O vérifie $OA = OB = OC$, donc appartient aux trois médiatrices du triangle. C'est donc le point de concours de ces trois médiatrices, dont l'existence a été prouvée au Théorème 12.1. Le rayon de $\mathcal{C}$ est nécessairement OA. Ainsi, si ce cercle $\mathcal{C}$ existe, il est unique puisque l'on connaît son centre et son rayon.

Synthèse — Soit O le point de concours des médiatrices du triangle ABC. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA contient effectivement les points A, B et C puisque $OA = OB = OC$. ■

Définition 12.1 *L'unique cercle passant par les sommets A, B et C du triangle ABC est appelé* ***cercle circonscrit*** *à ce triangle.*

12.2 Médianes

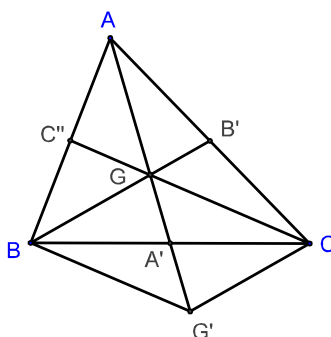
12.2.1 Au collège

On appelle **médiane** d'un triangle toute droite joignant un sommet du triangle au milieu du côté opposé. Alors :

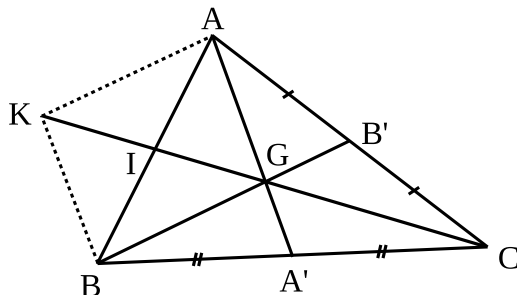
Théorème 12.3 *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.*

Preuve — Voici deux démonstrations de niveau collège qui utilisent le Théorème de la droite des milieux. La seconde utilise aussi les propriétés des parallélogrammes.

Première preuve — Soit G l'intersection des médianes (AA') et (BB'). Traçons le symétrique G' de G par rapport à A'. Le quadrilatère $BGCG'$ est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. Comme B' est le milieu de $[AC]$ et comme $(B'B)//(CG')$, le Théorème de la droite des milieux montre que G est le milieu de $[AG']$. Mais alors, comme $(CG)//(BG')$, et comme la droite (CG) passe par le milieu de $[AG']$, ce même théorème montre que (CG) coupe (AB) en C'' milieu de $[AB]$. Cela montre que G appartient à la troisième médiane issue de C du triangle ABC.



Seconde preuve — Soit G l'intersection des médianes (AA') et (BB'). Soit K le symétrique de C par rapport à G. Le Théorème de la droite des milieux montre que $(KB)//(GA')$ et $(KA)//(GB')$, de sorte que $(KB)//(AG)$ et $(KA)//(BG)$. Cela montre que le quadrilatère $AGBK$ est un parallélogramme. Les diagonales $[KG]$ et $[AB]$ se coupent donc en leur milieu que nous noterons I, et G appartiendra à la dernière médiane (CI) issue de C. ■



Les deux preuves du Théorème 12.3 que nous venons de donner peuvent être proposées en collège. Elles n'ont qu'un seul défaut sur lequel on n'insistera pas

devant les élèves : celui d'admettre que les médianes (AA') et (BB') se coupent. Cela se voit trop clairement sur la figure pour ne pas être admis en collège. Mais une simple observation n'est jamais une preuve, et nous démontrerons tout de suite cette « évidence » pour terminer ce travail :

Théorème 12.4 *Deux médianes d'un triangle sont toujours sécantes.*

Preuve — Utilisons les propriétés fondamentales des demi-plans énoncées au Théorème 15.5. La droite (AA') partage le plan en deux demi-plans ouverts $\mathcal{P}_B$ (contenant B) et $\mathcal{P}_C$ (contenant C). Ces deux demi-plans sont bien différents, autrement les points B et C seraient dans un même demi-plan de frontière (AA'), et la convexité des demi-plans montrerait que $[BC]$ est aussi inclus dans ce demi-plan ouvert, ce qui est absurde puisque $[BC]$ coupe la frontière en A'.

Le milieu B' de $[AC]$ appartient à la demi-droite $]AC)$ qui est entièrement incluses dans $\mathcal{P}_C$ donc $B' \in \mathcal{P}_C$. Finalement $B \in \mathcal{P}_B$ et $B' \in \mathcal{P}_C$, donc $[BB']$ coupe la frontière (AA'). ■

En fait, la preuve du Théorème 12.4 montre beaucoup plus que la simple existence d'un point d'intersection des médianes (AA') et (BB'). Elle montre que les segments $[AA']$ et $[BB']$ se coupent. On a en effet montré que $[BB']$ coupait la frontière (AA'), et en procédant de la même façon on montrerait aussi que $[AA']$ coupe la frontière (BB'). Finalement :

$$[AA'] \cap [BB'] = \{G\}.$$

Cela permet de positionner le point G sur la droite (AA') entre A et A', et faire de même avec les autres médianes. Cela permet donc d'affirmer que G est à l'intérieur du triangle ABC, si l'on sait que l'intérieur d'un triangle est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des sommets du triangle.

Définition 12.2 *L'intersection des médianes d'un triangle est appelé* ***centre de gravité*** *du triangle.*

Si l'on découpe une tôle homogène suivant un triangle ABC, le point G est l'endroit exact où placer la pointe d'un compas pour que la plaque ABC tienne en équilibre dans l'espace, ce qui explique cette dénomination. On sait aussi que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

On peut démontrer que :

Théorème 12.5 *Le centre de gravité d'un triangle se trouve au tiers de la base de chaque médiane.*

Preuve — Pour conclure, il suffit de regarder les deux figures utilisées dans la preuve du Théorème 12.3 et de rappeler que G appartient aux segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ comme on l'a vu dans la preuve du Théorème 12.4. Plus précisément, dans la première figure on constate que G est milieu de $[AG']$ et que A' est milieu de $[GG']$. Comme $G \in [AA']$, on obtient :

$$GA' = \frac{GG'}{2} = \frac{AG}{2} \quad \text{et} \quad AA' = AG + GA' = \frac{3}{2}AG$$

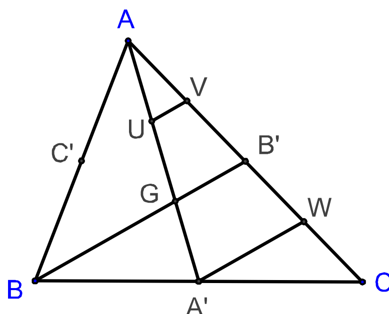
d'où $GA' = AA'/3$ comme désiré. On peut faire de même dans la seconde figure puisque I est milieu de $[KG]$ et G est milieu de $[CK]$. ■

12.2.2 Autres preuves

Voici d'autres preuves de l'existence du centre de gravité d'un triangle affirmé par le Théorème 12.3.

A. Projection d'une graduation régulière

On suppose ici que l'on sait que deux médianes d'un triangle sont toujours sécantes (Théorème 12.4). Soit G l'intersection des médianes (AA') et (BB'). Soit U le milieu de $[AG]$. Soient V et W les projetés de U et A' sur (AC) parallèlement à (BB').



Le Théorème de la droite des milieux montre que V est le milieu de $[AB']$ (utiliser le triangle AGB') et que W est le milieu de $[B'C]$ (utiliser le triangle CBB'). Par conséquent $AV = VB'$ et $B'W = WC$. Comme $AB' = B'C$, on déduit que :

$$AV = VB' = B'W = WC = \frac{AC}{4}.$$

La graduation A, V, B', W de $[AC]$ est donc régulière, et par projection on en déduit que la graduation A, U, G, A' de $[AA']$ est aussi régulière (ce résultat général se montre en utilisant que le projeté du milieu d'un segment est égal

Muni de la caractérisation donnée par le Théorème 12.7, on peut maintenant démontrer que les médianes sont concourantes en utilisant des aires :

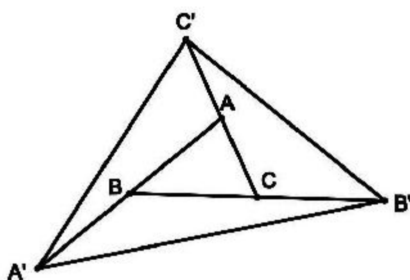
Théorème 12.8 *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.*

Preuve — On admet ici que deux médianes (AA') et (BB') du triangle ABC sont concourantes en un point G situé à l'intérieur du triangle (Théorème 12.4). Le Théorème 12.7 montre que $\mathcal{A}_{GCA} = \mathcal{A}_{GAB}$ et $\mathcal{A}_{GAB} = \mathcal{A}_{GBC}$, ce qui entraîne $\mathcal{A}_{GCA} = \mathcal{A}_{GBC}$, et le même Théorème 12.7 montre que G appartient à la troisième médiane du triangle ABC. ■

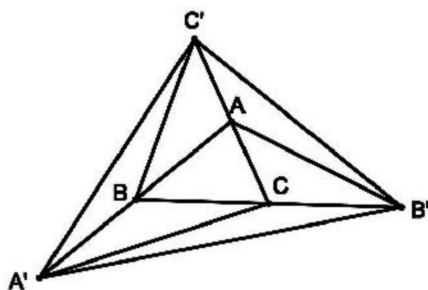
Pour terminer, voici un exercice qui se résout facilement dès que l'on pense à utiliser des médianes et comparer des aires :

Exercice 12.2 *Etant donné un triangle ABC, on construit les symétriques A', B', C' respectifs des points A, B, C par rapport aux points B, C, A. Calculer l'aire du triangle $A'B'C'$ en fonction de celle du triangle ABC.*

Solution — Deux triangles de même hauteur et de mêmes bases ont des aires égales. En traçant trois médianes, on obtient la figure (b) ci-dessous où l'on dénombre 7 triangles de même aire. Par exemple les triangles $AC'B$ et $BC'A'$ ont même aire car de bases $A'B$ et BA égales, et de même hauteur. Donc $\mathcal{A}_{A'B'C'} = 7\mathcal{A}_{ABC}$.



(a) Situation générale



(b) Un bon découpage

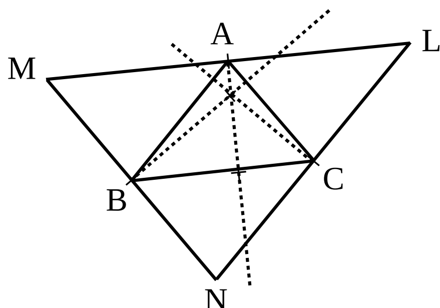
12.3 Hauteurs

On appelle **hauteur** d'un triangle toute droite passant par un sommet et orthogonale au côté opposé. Le Théorème suivant montre que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un point H qui sera appelé l'**orthocentre** du triangle.

Théorème 12.9 *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Preuve — Proposons trois démonstrations. La première utilise un triangle médian et convient en collège, la seconde peut être présentées dès que l'on possède la notion de vecteurs, la troisième utilise le produit scalaire.

Soit ABC un triangle non aplati. Remarquons que deux hauteurs de ce triangle sont toujours sécantes, car s'il existait deux hauteurs parallèles, les supports des côtés sur lesquelles elles tombent seraient parallèles, et le triangle ABC serait aplati, ce qui est faux.



Première preuve — Sur la figure ci-dessus, nous avons tracé les parallèles aux côtés du triangle ABC passant par les sommets opposés. Ces parallèles se coupent en des points distincts L, M et N. Ces points sont distincts, car par exemple si l'on avait $M = L$, on aurait $(NM) = (NL)$, et la droite (AC) serait parallèle à (AB), absurde.

On constate que les hauteurs de ABC sont les médiatrices de LMN. En effet, les quadrilatères $MACB$ et $ALCB$ sont des parallélogrammes, donc $MA = BC = AL$ et A est le milieu de $[ML]$, et d'autre part la hauteur Δ_A du triangle ABC issue de A est perpendiculaire à (BC), donc aussi à (ML) puisque (BC) et (ML) sont parallèles. Cela montre que Δ_A est perpendiculaire au segment $[ML]$ et passe par son milieu, donc que Δ_A est la médiatrice de $[ML]$. On ferait de même avec les autres hauteurs.

On sait que les trois médiatrices de LMN sont concourantes (Théorème 12.1), on en déduit que les trois hauteurs de ABC le sont aussi.

Deuxième preuve — Soit H tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ où O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$$

où A' est le milieu de $[BC]$. Cela montre que (AH) est parallèle à (OA'), et comme (OA') est la médiatrice du côté $[BC]$, on en déduit que (AH) est perpendiculaire à (BC), donc que H appartient à la hauteur issue de A. On

reproduit trois fois ce raisonnement et l'on peut affirmer que H appartient aux trois hauteurs de ABC.

Troisième preuve — L'identité de Stewart :

$$\forall M, A, B, C \in \mathcal{P} \quad \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

est facile à démontrer en utilisant la relation de Chasles. Si l'on désigne par M l'intersection des hauteurs du triangle ABC issues de A et de B, on a évidemment :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} = 0,$$

donc $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$ en utilisant l'identité de Stewart. Cela prouve que M appartient à la dernière hauteur. ■

12.4 Bissectrices

12.4.1 Au collège

Rappelons qu'en collège :

- la **bissectrice d'un angle** est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure (Définition 10.1),
- les angles dont on parle sont saillants, et identifiés à des secteurs angulaires saillants. Les mesures de ces angles sont comprises entre 0° et 180°.

En collège, on caractérise les points de la bissectrice d'un angle par la propriété d'équidistance aux deux côtés de l'angle, ce qui permet de démontrer que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle inscrit.

Cette démarche permet de démontrer la coucourance des bissectrices intérieures d'un triangle de la même façon que l'on prouve la concourance des médiatrices. Cette similarité facilite la compréhension et la mémorisation de ces deux résultats et de leurs preuves.

Plus précisément, en collège on demandera d'énoncer les Théorème 12.10 et 12.11 suivants :

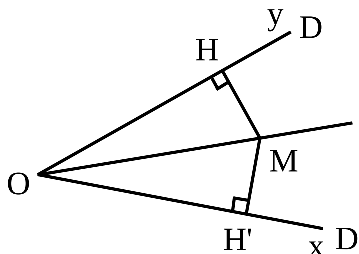
Théorème 12.10 *Un point M appartient à la bissectrice d'un angle si, et seulement si, il est à égale distance des côtés de cet angle.*

Preuve — On sous-entend ici que l'on ne s'intéresse qu'aux points M situés dans le secteur saillant défini par l'angle saillant dont on parle, sinon le résultat est faux (Section 10.5.2). On sous-entend aussi qu'une bissectrice est une demi-droite.

Voici trois preuves possibles :

Première méthode — La caractérisation provient d'une étude plus générale sur les points équidistants de deux droites sécantes, menée à la Section 10.5.2 p. 148, qui aboutit aux Théorèmes 10.8 et 10.9, mais les arguments utilisés ne conviennent pas au niveau collège.

Deuxième méthode — La preuve du Théorème 10.6 p. 147, qui utilise le Théorème de Pythagore et les propriétés de la symétrie axiale, convient au niveau collège si l'on sous-entend que l'on ne travaille que dans un secteur angulaire saillant.



Troisième méthode — On utilise le cosinus d'un angle défini à la Section 11.1 p. 153. Soient M un point du secteur angulaire saillant $[\widehat{xOy}]$, D et D' les supports des côtés $[Ox)$ et $[Oy)$ de l'angle, et H, H' les projetés orthogonaux de M sur les D et D'.

• Si M est à égale distance de D et D', alors :

$$\cos\widehat{OMH} = \frac{MH}{MO} = \frac{MH'}{MO} = \cos\widehat{OMH'}$$

donc $\widehat{OMH} = \widehat{OMH'}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, en nous plaçant dans les triangles OMH et OMH' on obtient :

$$\widehat{MOH} = 90° - \widehat{OMH} = 90° - \widehat{OMH'} = \widehat{MOH'}.$$

Finalement $\widehat{MOH} = \widehat{MOH'}$ et M sera sur la bissectrice de $\widehat{xOy}$.

• Réciproquement, si M appartient à la bissectrice alors $\widehat{MOH} = \widehat{MOH'}$, donc $\widehat{OMH} = \widehat{OMH'}$, ce qui entraîne $\cos\widehat{OMH} = \cos\widehat{OMH'}$ et :

$$\frac{MH}{MO} = \frac{MH'}{MO}.$$

Cela montre que $MH = MH'$, autrement dit que le point M se trouve bien à égale distance des côtés de l'angle. ■

La troisième méthode indiquée ci-dessus est celle que l'on retrouve dans le *Nouveau Prisme Maths 4*^{e} (éd. 2011) [31] :

4 Je situe les points équidistants des deux côtés d'un angle

Sur la figure ci-contre, le point N est équidistant des côtés de l'angle saillant $\widehat{xOy}$.

1 a. Démontrer que : $\cos \widehat{ONR} = \cos \widehat{ONS}$.
b. En déduire que : $\widehat{ONR} = \widehat{ONS}$.

2 a. Démontrer que $\widehat{RON} = \widehat{NOS}$.
b. En déduire que le point N appartient à la bissectrice de l'angle saillant $\widehat{xOy}$.

3 Que peut-on alors dire d'un point équidistant des deux côtés d'un angle saillant ?

Théorème 12.11 *Les trois bissectrices d'un triangle concourent en un point I qui est le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle (que l'on appelle le* ***cercle inscrit*** *au triangle).*

Preuve — Le raisonnement est simple : si I désigne le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, alors I est à égale distance des côtés de ces angles (Théorème 12.10), donc si H_A, H_B et H_C désignent les projetés orthogonaux de I sur les droites (BC), (CA) et (AB) :

$$IH_B = IH_C \quad \text{et} \quad IH_C = IH_A$$

d'où $IH_B = IH_A$ par transitivité de la relation d'égalité. Le point I est donc à égale distance des droites (CA) et (CB), donc appartient à la bissectrice de l'angles $\widehat{C}$ (Théorème 12.10). ■

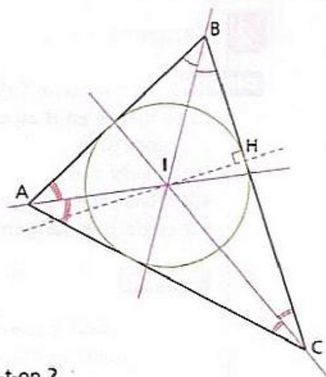
L'énoncé du Théorème 12.11 est imprécis, mais suffit en collège où les trois bissectrices d'un triangle sont supposées être des bissectrices intérieures. Les collégiens ne disposent que de la notion de bissectrice d'un angle saillant, vue comme une droite ou une demi-droite selon le contexte. Dans un triangle, les seules bissectrices qu'il sera amené à dessiner seront les bissectrices des angles saillants du triangle, donc des bissectrices intérieures.

Dans la preuve du Théorème 12.11, on admet que deux bissectrices intérieures du triangle ABC se coupent en un point situé à l'intérieur du triangle. Cela permet de raisonner en se limitant aux seuls points intérieurs du triangle, et se placer dans chacun des trois secteurs saillants définis par les angles du triangle, justifiant ainsi l'emploi de la caractérisation métrique du Théorème 12.10.

La figure suivante montre une activité sur le centre du cercle inscrit tirée du *Nouveau Prisme Maths* de quatrième [31].

5 Je découvre la propriété des bissectrices d'un triangle et le cercle inscrit

A Je conjecture à l'aide d'un logiciel



1 a. Tracer un triangle, puis construire les bissectrices de deux angles de ce triangle.
On appelle I leur point d'intersection.
b. Tracer la bissectrice du troisième angle.
c. Déplacer les sommets du triangle.
Que remarque-t-on ?
d. Que peut-on conjecturer au sujet des trois bissectrices d'un triangle ?

2 a. Tracer la perpendiculaire à un côté du triangle passant par I. Elle coupe ce côté en H.
b. Tracer le cercle de centre I passant par H.
c. Déplacer les sommets du triangle. Que remarque-t-on ?

B Je démontre

1 a. Tracer un triangle ABC, puis construire les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
Ces deux bissectrices se coupent en un point que l'on note I.
b. Placer les points J, H, K, pieds respectifs des perpendiculaires aux droites (AB), (BC), (AC) passant par le point I.

2 a. Démontrer que IJ = IH, puis que IH = IK.
b. En déduire que le point I est équidistant des côtés de l'angle $\widehat{BAC}$.
c. Démontrer que [AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

3 a. Construire le cercle de centre I et de rayon IH.
b. Pourquoi ce cercle est-il tangent à chaque côté du triangle ABC ?

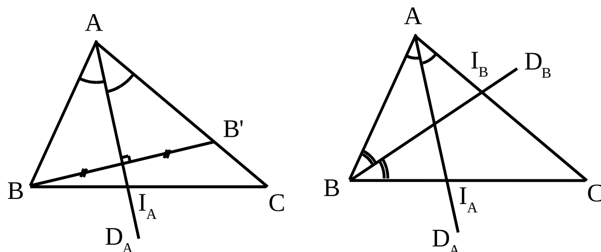
Ce cercle est appelé **le cercle inscrit dans le triangle ABC.**

Finalement, la preuve du Théorème 12.11 ne sera complète que si l'on prouve que deux bissectrices intérieures d'un triangle issues de sommets différents sont toujours sécantes en un point I situé à l'intérieur du triangle. Cela sera fait en utilisant des demi-plans au Théorème 12.12 ci-dessous, ou en utilisant des barycentres au Théorème 12.14 :

Théorème 12.12 *Deux bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point I situé à l'intérieur du triangle.*

Preuve — Utilisons les propriétés des demi-plans (Théorème 15.5). Soit D_A la bissectrice intérieure issue de A du triangle ABC. On sait que D_A est l'axe de l'unique réflexion s qui échange les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$. On trace $s(B) = B' \in [AC)$, et D_A apparaît comme une droite qui partage le plan en deux demi-plans ouverts $\mathcal{P}_B$ (contenant B) et $\mathcal{P}_{B'}$ (contenant B').

Ces deux demi-plans sont distincts autrement le segment $[BB']$ serait entièrement inclus dans l'un des demi-plans de frontière D_A, et ne pourrait pas couper la frontière en le milieu de $[BB']$, ce qui est le cas puisque D_A est, par hypothèse, la médiatrice de $[BB']$.



On a $A \in D_A$, $B' \in \mathcal{P}_{B'}$ et $C \in [AB') \setminus \{A\}$, donc $C \in \mathcal{P}_{B'}$. Il suffit maintenant de constater que $C \in \mathcal{P}_{B'}$ et $B \in \mathcal{P}_B$ pour pouvoir affirmer que le segment $[BC]$ coupe la droite-frontière D_A en un point I_A.

On montre ensuite que les segments $[AI_A]$ et $[BI_B]$ portés par les bissectrices intérieures issues de A et de B sont sécants. On a tracé ces segments sur le dessin de droite de la page précédente.

Les points I_A et I_B sont les intersections des bissectrices avec les côtés opposés. La droite D_A partage le plan en deux demi-plans ouverts $\mathcal{P}_B$ (contenant B) et $\mathcal{P}_C$ (contenant C). Puisque A est sur la frontière D_A, la demi-droite $[AC) \setminus \{A\}$ est incluse dans $\mathcal{P}_C$, donc $I_B \in [AC] \setminus \{A\} \subset \mathcal{P}_C$. Mais alors $B \in \mathcal{P}_B$ et $I_B \in \mathcal{P}_C$, donc $[BI_B]$ coupe la frontière D_A en un unique point I. On a donc :

$$[BI_B] \cap D_A = \{I\}\,.$$

Il suffit d'inverser les rôles de A et B pour obtenir $[BI_B] \cap [AI_A] = \{I\}$. On a montré que les segments $[BI_B]$ et $[AI_A]$ étaient sécants en I, ce qui implique que I est à l'intérieur du triangle ABC. En effet l'intérieur $\operatorname{Int} ABC$ du triangle ABC est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des sommets A, B, C du triangle, ce qui revient à l'écrire sous la forme :

$$\operatorname{Int} ABC = \bigcup_{J \in [BC]} [AJ]$$

en utilisant l'associativité des barycentres. ■

Dans le même registre, nous pouvons donner une preuve élégante de l'existence d'une intersection de deux bissectrices d'un triangle issues de sommets différents, qu'elles soient intérieures ou extérieures :

Théorème 12.13 *Deux bissectrices (intérieures ou extérieures) d'un triangle issues de sommets différents sont toujours sécantes.*

Preuve — Soient Δ_A et Δ_B les bissectrices du triangle ABC issues de A et B. Il peut s'agir de bissectrices intérieures ou extérieures : cela n'aura aucun effet sur le raisonnement puisqu'on utilisera seulement qu'une bissectrice d'un triangle est une bissectrice d'un couple de droites qui sont les supports de deux côtés du triangle. Ces bissectrices sont donc définies comme étant les axes des réflexions qui échangent deux de ces supports.

La réflexion s_A d'axe Δ_A échange les droites (AB) et (AC), et la réflexion s_B d'axe Δ_B échange les droites (AB) et (BC), donc :

$$(AC) \overset{s_A}{\longmapsto} (AB) \overset{s_B}{\longmapsto} (BC)\,.$$

Raisonnons par l'absurde : si Δ_A était parallèle à Δ_B, la composée $s_B \circ s_A$ serait une translation telle que $s_B \circ s_A\,((AC)) = (BC)$, donc les droites (AB) et (BC) seraient parallèles. C'est absurde puisque le triangle ABC n'est pas aplati. ■

12.4.2 Pour les matheux

Le développement de la Section 12.4.1 n'est pas satisfaisant car demande de préciser les parties du plans où l'on travaille. Nous proposons ici un méthode efficace pour déterminer les intersections des bissectrices et en déduire les cercles tangents aux côtés du triangle. Nous utilisons la notion de barycentre, mais il est facile de « maquiller » l'exposé en n'employant que la notion de vecteurs. Le premier résultat obtenu est :

Théorème 12.14 *Les trois bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point I centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle et appelé* ***cercle inscrit dans le triangle*** *ABC. Les coordonnées barycentriques de I sont (a, b, c) dans le repère (A, B, C), et le point I appartient à l'intérieur du triangle.*

Preuve — Soit I le pont de coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère (A, B, C), défini par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Soient M et N les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$